TABLEAU DES REPONSES AU TEST DE MATH/PHYSIQUE :

Afin de vous noter :
- si vous avez toutes les bonnes réponses à un QCM, vous avez 1 point,
- si vous avez une erreur (par exemple, une réponse que vous n'avez pas cochée), vous avez 0,5 point
- si vous avez deux erreurs, vous n'avez pas de point.

Pour les QCM où une seule réponse est correcte, vous avez 1 point si vous l'avez cochée, si vous avez coché une autre réponse ou plusieurs réponses, vous n'avez pas de point.

QCM	REPONSES
1	C
2	B
3	C
4	A
5	A
6	E
7	D
8	B E
9	B D E
10	E
11	C
12	B
13	C
14	C
15	C D
16	B
17	C

- TEST D'EVALUATION - Correction -

Question 01 : C.

$$V(x) = \frac{Kqq'}{\sqrt{a^2+x^2}} \qquad \textit{K, q et q' étant des constantes}$$

On rappelle que : $\quad (\lambda.f)' = \lambda.f'$

d'où $\quad V'(x) = Kqq' \left[\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\right]'.$

Pour dériver $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$, on peut utiliser $\left[\dfrac{1}{\sqrt{u}}\right]' = -\dfrac{1}{u^2}\,u'$

soit $\quad \left[\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\right]' = -\dfrac{1}{a^2+x^2}\left[\sqrt{a^2+x^2)}\right]' \qquad$ avec $\qquad [\sqrt{u}]' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\,u'$

d'où $\quad \left[\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\right]' = -\dfrac{1}{a^2+x^2}\;\dfrac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}$

$$\boxed{\boldsymbol{V'(x) = -\frac{Kqq'\,x}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}}} \qquad car\;\; u.\sqrt{u} = u^{3/2}$$

Plus simplement,

$$\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\right]' = \left[\left(a^2+x^2\right)^{-1/2}\right]' = -\frac{1}{2}\,(a^2+x^2)^{-3/2}.(2x) = -\frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

car $[u^n]' = n\,u^{n-1}\,u'$: $\qquad V'(x) = -\dfrac{Kqq'\,x}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}$

Question 02 : B.

$$v(t) = v_L\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad \textit{avec } v_L \textit{ et } \tau \textit{ constantes}$$

La dérivée d'une somme est la somme des dérivées.

On rappelle aussi que : $\quad (e^u)' = u'.e^u$ donc $\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right)' = \left(e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)' = -\dfrac{1}{\tau}\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$v'(t) = \frac{dv}{dt} = v_L \times \left[0 - \left(-\frac{1}{\tau}\right).e^{-\frac{t}{\tau}}\right] = \frac{v_L}{\tau}\;e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v'(t) = \frac{v_L}{\tau}\;e^{-\frac{t}{\tau}}}}$$

Question 03. Suite de la question 02 : C.

$$v(t) = 0{,}99.v_L \quad \Leftrightarrow \quad v_L \left(1 - e^{-\dfrac{t}{\tau}}\right) = 0{,}99.v_L$$

$$v(t) = 0{,}99.v_L \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-\dfrac{t}{\tau}} = 0{,}99$$

$$v(t) = 0{,}99.v_L \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\dfrac{t}{\tau}} = 0{,}01$$

$$v(t) = 0{,}99.v_L \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{t}{\tau} = ln(0{,}01) = ln(10^{-2}) = -2\,ln(10)$$

$$v(t) = 0{,}99.v_L \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{t = (2\ \ln(10)).\tau = 4{,}6\,\tau}} \qquad car\ \ln(10) \approx 2{,}3$$

Question 04 : A.

$$N(t) = A\left(e^{-\alpha.t} - e^{-\beta.t}\right)$$

$$\begin{aligned} N'(t) &= A\left(e^{-\alpha.t} - e^{-\beta.t}\right)' \\ N'(t) &= A\left(-\alpha\, e^{-\alpha.t} - (-\beta)\, e^{-\beta.t}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\boldsymbol{N'(t) = A\left(-\alpha\, e^{-\alpha.t} + \beta\, e^{-\beta.t}\right)}}$$

Question 05 : A.

$$\begin{aligned} N'(t) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad A\left(-\alpha\, e^{-\alpha.t} + \beta\, e^{-\beta.t}\right) = 0 \\ N'(t) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\alpha\, e^{-\alpha.t} + \beta\, e^{-\beta.t} = 0 \qquad car\ A \neq 0 \\ N'(t) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha\, e^{-\alpha.t} = \beta\, e^{-\beta.t} \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à isoler les exponentielles et à prendre le logarithme népérien. Pour cela, on écrit :

$$\begin{aligned} \alpha\, e^{-\alpha.t} = \beta\, e^{-\beta.t} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^{-\alpha t}}{e^{-\beta t}} = \frac{\beta}{\alpha} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{(\beta-\alpha).t} = \frac{\beta}{\alpha} \qquad car \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \\ &\Leftrightarrow \quad (\beta - \alpha)\, t = ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\boldsymbol{t = \frac{ln\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}{\beta - \alpha} = \frac{ln\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}{\alpha - \beta}}}$$

Question 06 : E.

$$\boldsymbol{F(x) = \frac{C}{x^2}}$$

$$W = \int_{x_0}^{2\,x_0} F(x).dx = \int_{x_0}^{2\,x_0} \frac{C}{x^2}\ dx = C \int_{x_0}^{2\,x_0} x^{-2}\ dx$$

car

$$\int_a^b \lambda.f(x).dx = \lambda\ \int_a^b f(x).dx \qquad et \qquad \frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

Comme $\quad \int_a^b x^n.dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b \qquad pour\ n \neq -1,$

$$W = C \int_{x_0}^{2\,x_0} x^{-2}\ dx = C\ \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_{x_0}^{2\,x_0} = C\ \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{x_0}^{2\,x_0} = C\ \left[-\frac{1}{x}\right]_{x_0}^{2\,x_0} = C\ \left[-\frac{1}{2x_0} - \left(-\frac{1}{x_0}\right)\right]$$

Donc,

$$\boxed{\boldsymbol{W = C\ \left[-\frac{1}{2x_0} + \frac{1}{x_0}\right]\ = \frac{C}{2\,x_0}}}$$

Question 07 : D.

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}\ =\ \beta \int_0^t du \ \Leftrightarrow\ \int_{z_0}^{z} x^{-1/2}\,dx\ =\ \beta \int_0^t du$$

$$\Leftrightarrow\ \left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_{z_0}^{z}\ =\ \beta\,[u]_0^t$$

$$\Leftrightarrow\ \left[2\ \sqrt{x}\right]_{z_0}^{z}\ =\ \beta(t-0)$$

$$\Leftrightarrow\ 2\left(\sqrt{z} - \sqrt{z_0}\right) = \beta\ t$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{z} - \sqrt{z_0} = \frac{\beta}{2}\ t$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{z} = \sqrt{z_0} + \frac{\beta}{2}\ t$$

$$\boxed{\boldsymbol{z(t) = \left(\sqrt{z_0} + \frac{\beta}{2}\ t\right)^2}}$$

<u>Question 08 : B - E.</u>

La solution générale de l'équation différentielle : $\boldsymbol{y' = a\,y}$ $\left(avec\ y' = \dfrac{dy}{dt}, a \neq 0\right)$ s'écrit (c'est une question de cours):

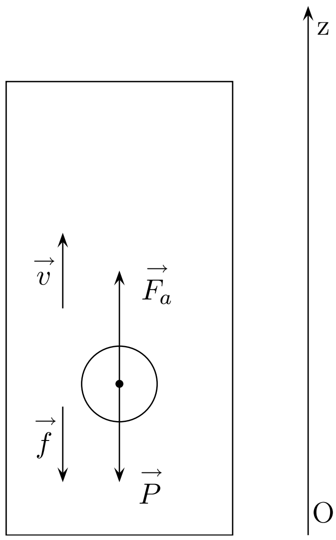
$$\boxed{\boldsymbol{y(t) = K\,e^{a\,t}}}$$

La solution générale de l'équation différentielle : $\boldsymbol{y' = a\,y + b}$ s'écrit (c'est une question de cours):

$$\boxed{\boldsymbol{y(t) = K\,e^{a\,t} - \frac{b}{a}}}$$

<u>Question 09 : B - D - E.</u>

La force de frottement $\vec{f}$ est opposée au vecteur vitesse $\vec{v}$ car $\vec{f} = -k\ \vec{v}$
Or la bulle monte donc le vecteur vitesse $\vec{v}$ est dirigé vers le haut, d'où la force de frottement $\vec{f}$ est dirigée vers le bas.



D'autre part, la poussée d'Archimède s'écrit : $\vec{F_a} = -\rho\,V\ \vec{g}$
Donc, la norme (ou le module) de cette force est : $||\vec{F_a}|| = \rho\,V\,g = F_a$

Le poids de la bulle s'écrit $\vec{P} = m\ \vec{g}$ donc la norme de cette force est P = m g = ρ_0 V g
(ρ_0 désigne la masse volumique de l'air donc ρ_0 V est la masse de la bulle d'air).

Comme $\rho \approx 10^3\ kg.m^{-3} >> \rho_0 \approx 1{,}2\ kg.m^{-3}$, on peut négliger P devant F_a.

$$\frac{F_a}{P} = \frac{\rho\,V\,g}{\rho_0\,V\,g} = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1000}{1{,}2} \approx 800$$

<u>Question 10 : E.</u>

La deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{F_a} + \vec{f} = m\ \vec{a}$$

Or, d'après la question précédente, on a négligé P devant F_a. Donc, il ne reste que :

$$\vec{F_a} + \vec{f} = m\ \vec{a}$$

c'est à dire que :

$$-\rho V \vec{g} - k \vec{v} = m \vec{a}$$

Projetons cette égalité vectorielle sur l'axe Oz orienté vers le haut :

$$-\rho V (-||\vec{g}||) - k v = m a = m \frac{dv}{dt}$$

ou

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} v + \frac{\rho V g}{m} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} v + \frac{\rho V g}{\rho_0 V}$$

Finalement, l'équation différentielle du mouvement est :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} v + \frac{\rho}{\rho_0} g$$

Elle est de la forme $\boldsymbol{v' = \frac{dv}{dt} = a\, v + b}$ avec $\boxed{\boldsymbol{a = -\frac{k}{m}}}$ et $\boxed{\boldsymbol{b = \frac{\rho}{\rho_0} g}}$

Question 11 : C.

D'après la question 8, la solution générale de cette équation différentielle est :

$$v(t) = K e^{a t} - \frac{b}{a} \qquad avec \qquad a = -\frac{k}{m} \quad et \quad b = \frac{\rho}{\rho_0} g$$

$$v(t) = K e^{-\frac{k}{m} t} - \frac{\frac{\rho}{\rho_0} g}{-\frac{k}{m}} = K e^{-\frac{k}{m} t} - \frac{\frac{\rho}{\rho_0} g}{-\frac{k}{\rho_0 V}}$$

soit

$$\boxed{\boldsymbol{v(t) = K e^{-\frac{k}{m} t} + \frac{\rho V}{k} g}}$$

Question 12 : B.

La vitesse limite est atteint au bout d'une durée théoriquement infinie. Lorsque t tend vers l'infini, on a :

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-\frac{k}{m} t} = 0 \quad donc \quad \lim_{t \to +\infty} v(t) = \frac{\rho V}{k} g$$

$$\boldsymbol{v_L = \frac{\rho V}{k} g}$$

Application numérique.

$$v_L = \frac{\rho V}{k} g = \frac{\rho \times \frac{4}{3} \pi r^3}{k} g = \frac{10^3 \times 4 \times 10^{-6}}{3} \times 10 = \frac{4}{3} .10^{-2} \ m/s$$

$$\boxed{\boldsymbol{v_L \approx 1{,}33 \ cm/s}}$$

Question 13 : C.

L'équation différentielle est :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x \;=\; 0$$

Elle est de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2.x = 0$ qui est une équation différentielle du second ordre caractéristique d'un oscillateur harmonique.
La solution générale est alors de la forme : $x(t) = A\,cos\,(\omega_0\,t) + B\,sin\,(\omega_0\,t)$.

En appliquant ce résultat à l'équation différentielle proposée, on obtient :

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = A\,cos\,(\omega_0\,t) + B\,sin\,(\omega_0\,t) \qquad avec \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}}$$

Question 14 : C.

Déterminons les valeurs des coefficients A et B à l'aide des conditions initiales.
Comme cos(0) = 1 et que sin(0) = 0 :

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = A\,cos(0) \;+\; B\,sin(0) = 0 \quad soit \quad A = 0$$

D'autre part,

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\,A\,\omega_0\,sin\,(\omega_0\,t) + B\,\omega_0\,cos\,(\omega_0\,t)$$

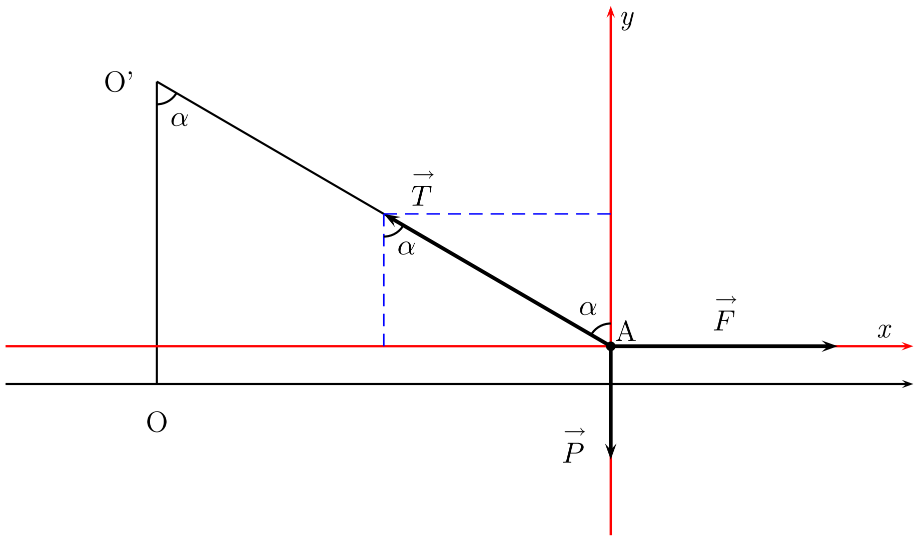
$$v(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad v(0) = v_0 = A\,\omega_0\,sin(0) \;+\; B\,\omega_0\,cos(0) = \;B\,\omega_0 \quad soit \quad B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

En remplaçant dans l'expression de x(t), il vient:

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) \;=\; \frac{v_0}{\omega_0}\,sin\,(\omega_0\,t) \qquad avec \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}}$$

Question 15 : C - D.

Une masse m est à l'équilibre. Elle est soumise à trois forces : $\vec{T}$, $\vec{F}$ et le poids de la masse m, $\vec{P}$.
On note α l'angle $(O'O; O'A)$.



A l'équilibre, la somme des forces appliquées au point A est nulle:

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$$

Nous allons projeter cette égalité vectorielle sur les deux axes Ax et Ay.
Les composantes des vecteurs $\vec{P}$, $\vec{F}$ et $\vec{T}$ sont respectivement:

$$\vec{P} = \begin{vmatrix} 0 \\ -P \end{vmatrix} \qquad \vec{F} = \begin{vmatrix} F \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{T} = \begin{vmatrix} -T\,sin\alpha \\ T\,cos\alpha \end{vmatrix}$$

On rappelle que la projection d'un vecteur sur un axe orienté donne la composante de ce vecteur selon cet axe.

La projection de $\vec{P} + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$ sur l'axe Ax donne:

$$0 + F - T\,sin\alpha = 0$$

La projection de $\vec{P} + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$ sur l'axe Ay donne:

$$-P + 0 + T\,cos\alpha = 0$$

On obtient donc :

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{F = T\,sin\alpha} \\ \boldsymbol{P = mg = T\,cos\alpha} \end{cases}}$$

Question 16 : B.

Posons:
V : " Le sujet est vacciné "
M : " Le sujet est atteint de la maladie"
70 % des habitants de ce pays ont été vaccinés permet d'écrire $Pr(V) = 0{,}70$.
5 % des vaccinés, c'est à dire parmi les vaccinés, ont été atteints par la maladie M :
$Pr(M/V) = P_V(M) = 0{,}05$ (qui représente la probabilité d'être malade sachant que l'on a été vacciné)
60 % des sujets non vaccinés ont été atteint de la maladie : $Pr(M/\overline{V}) = P_{\overline{V}}(M) = 0{,}60$ (parmi les vaccinés, il y a 60% de malades)

Dans cette question on demande de calculer la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans cette population ait été victime de la maladie M, c'est à dire $Pr(M)$.
En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient:

$$\begin{aligned} Pr(M) &= Pr(M/V) \times Pr(V) + Pr(M/\overline{V}) \times Pr(\overline{V}) \\ Pr(M) &= Pr(M/V) \times Pr(V) + Pr(M/\overline{V}) \times (1 - Pr(V)) \\ Pr(M) &= 0{,}05 \times 0{,}70 + 0{,}60 \times 0{,}30 \end{aligned}$$

$$\boxed{\boldsymbol{Pr(M) = 0{,}215}}$$

Question 17 : C.

On demande de calculer la probabilité pour qu'un individu ait été vacciné sachant qu'il a été victime de la maladie, c'est à dire Pr(V/M).

En utilisant le théorème de Bayes (formule des probabilités des causes), on a :

$$\boxed{\boldsymbol{Pr(V/M) = \frac{Pr(V \cap M)}{Pr(M)} = \frac{Pr(M/V) \times Pr(V)}{Pr(M)} = \frac{0{,}05 \times 0{,}70}{0{,}215} \approx 0{,}16}}$$